

Cours 5

Effet Hall quantique

Notes de cours

"Conduction Quantique et Physique Mésoscopique", École Polytechnique

Gilles Montambaux

Janvier 2010

5.1 Introduction: l'effet Hall "classique"

L'effet Hall quantique constitue certainement une des découvertes les plus remarquables de la fin du $XX^{\text{ème}}$ siècle en Physique. Sa caractéristique la plus spectaculaire est la mesure du rapport de constantes universelles h/e^2 avec une précision de 10^{-9} , ce qui a des conséquences immédiates en métrologie, en particulier dans la définition de l'étalon de résistance.

L'effet Hall quantique consiste en fait en deux effets physiques différents. Les découvertes de l'effet Hall quantique entier en 1980, et de l'effet Hall quantique fractionnaire en 1983 ont toutes deux été récompensées par l'attribution du prix Nobel (1985 et 1998). Dans le cadre de ce cours, nous aborderons simplement la physique de l'effet Hall entier, relativement simple à comprendre, encore qu'il soulève un certain nombre de questions subtiles qui ne seront pas abordées ici. L'effet Hall fractionnaire est beaucoup plus complexe et nécessite une compréhension profonde de l'effet de l'interaction coulombienne entre les électrons. Vingt-cinq ans après la découverte initiale, l'effet Hall quantique est toujours source de nombreux travaux et questions, comme le montre le nombre constant de publications sur le sujet, une centaine par an.

Avant d'aborder l'effet Hall quantique, il est utile de rappeler les ingrédients physiques de l'effet Hall "classique", découvert un siècle auparavant par Ed-

win Hall (1879). Pendant sa thèse de doctorat, E. Hall essayait de répondre à une question soulevée par Maxwell, de savoir si la résistance était affectée par le champ magnétique, le courant devant "frotter" sur les cotés. Il montre expérimentalement que sous champ magnétique un courant induit une tension dans la direction perpendiculaire et que ce courant est proportionnel au champ magnétique appliqué. Cette découverte remarquable, bien avant la découverte de l'électron par J.J. Thompson en 1897, permet de déterminer la densité des porteurs de charges, et E. Hall constate aussi que le signe de ces porteurs dépend du matériau. Ce signe "anormal" de l'effet Hall ne sera compris que 50 ans plus tard par la théorie des bandes et la notion de trou.

L'effet Hall n'est pas qu'une curiosité de laboratoire. Il a aussi des applications extrêmement importantes puisqu'il permet de détecter simplement un champ magnétique ou ses variations par une mesure de tension. En particulier, l'industrie automobile utilise des capteurs à effet Hall pour mesurer la vitesse de rotation des moteurs, des boîtes de vitesses, des cardans, etc. (2 milliards de sondes de Hall sont fabriquées par an!).

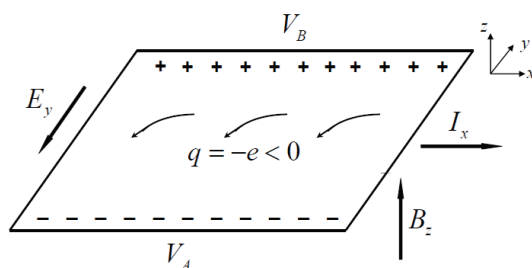


Figure 5.1: Géométrie de l'effet Hall.

Rappelons d'abord en quoi consiste l'effet Hall "classique". Prenons un gaz de porteurs de charge q et de masse m , supposé bidimensionnel, comme indiqué sur la figure (5.1). En présence d'un champ B perpendiculaire au plan, les porteurs injectés dans la direction x subissent la force de Lorentz et leur trajectoire est courbée, ce qui conduit à une accumulation de charges sur les bords de l'échantillon. Ces charges induisent un champ électrique E_y , ce qui correspond à une tension V_H le long de la direction y . Un régime stationnaire est ainsi atteint, dans lequel le champ électrique compense la force de Lorentz et l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times B) - m \frac{\vec{v}}{\tau} = 0 \quad (5.1)$$

où le dernier terme, phénoménologique, représente un "frottement" dû au

désordre, comme dans le modèle de Drude. τ est appelé temps de relaxation ou temps de collision. En projetant selon les deux directions x et y , on obtient

$$\begin{aligned} E_x + v_y B &= \frac{mv_x}{q\tau} \\ E_y - v_x B &= \frac{mv_y}{q\tau}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il n'y a pas de courant dans la direction y ($v_y = 0$). Par conséquent, selon la direction x , la vitesse v_x reste inchangée $v_x = q\tau E_x/m$, ce qui conduit à une densité de courant

$$j_x = n_{el} q v_x = \frac{n_{el} q^2 \tau}{m} E_x \quad (5.3)$$

inchangée et donnée par la formule de Drude, où n_{el} désigne la densité de porteurs. Le champ électrique induit selon y est donné par $E_y = v_x B$, ce qui correspond à une différence de potentiel V_H , appelée **Tension de Hall**, donnée par $V_H = W E_y$ où W est la largeur de l'échantillon. Le courant I_x selon x est donné par $I_x = j_x W = n_{el} q v_x W$. Par conséquent

$$V_H = \frac{B}{n_{el} q} I_x \quad (5.4)$$

ce qui définit une résistance transverse $R_H = V_H/I_x$, appelée **Résistance de Hall** et donnée par

$$\boxed{R_H = \frac{B}{n_{el} q}} \quad (5.5)$$

La mesure de cette résistance, permet de déterminer la densité et le signe des porteurs.

Tenseur de conductivité

L'effet Hall correspond à l'existence simultanée d'un courant et d'une tension dans des directions perpendiculaires. Pour décrire le transport électronique en présence d'un champ magnétique, il est nécessaire maintenant d'introduire un tenseur de conductivité $\vec{\sigma}$ tel que $\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E}$, pour généraliser la relation scalaire $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. On définit ainsi le tenseur de conductivité

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

et le tenseur de resistivité

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \bar{\rho} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

L'inversion du tenseur de conductivité conduit aux relations

$$\sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} . \quad (5.8)$$

Dans le modèle de Drude, on a, d'après (5.2),

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} 1/\sigma & -B/n_{el}q \\ B/n_{el}q & 1/\sigma \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

où $\sigma = n_{el}q^2\tau/m$ est la conductivité de Drude en champ nul. L'inversion du tenseur de resistivité conduit à

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \omega_c^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} . \quad (5.10)$$

5.2 L'effet Hall quantique entier

5.2.1 La découverte

En 1980, K. von Klitzing effectue des mesures de transport sous champ magnétique sur des échantillons de Si-MOSFET, dans lesquels un gaz bidimensionnel d'électrons est réalisé. Il s'agit de mesures simultanées de résistance longitudinale $R_L = R_{xx}$ et de résistance de Hall $R_H = R_{xy}$, en fonction de la tension de grille qui permet de faire varier la densité n_{el} de porteurs, ici des électrons, dans un champ magnétique constant. En abaissant la température, il constate l'apparition d'oscillations de la résistance longitudinale avec le champ magnétique. Ces oscillations sont connues depuis les années 1930 sous le nom d'oscillations "Shubnikov-de Haas", mais ici elles deviennent géantes, jusqu'à ce que la résistance longitudinale R_L s'annule pour certaines plages de n_{el} (figure 5.2). Et pour ces mêmes plages de n_{el} , la résistance de Hall devient constante ! Von Klitzing réalise très vite que cette **quantification** de la résistance de Hall correspond à

$$\boxed{R_H = \frac{h}{ie^2} \quad , \quad R_L = 0} \quad (5.11)$$

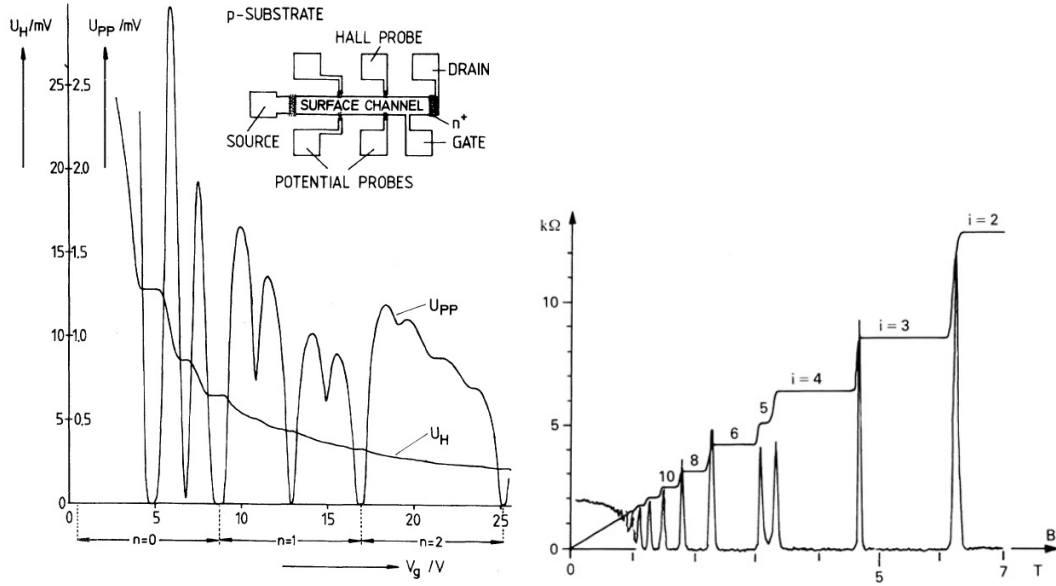


Figure 5.2: À gauche, l'expérience de Von Klitzing consiste à mesurer la tension longitudinale (U_{pp} , entre les "potential probes") et la tension transverse (U_H entre les "Hall probes"), en fonction de la tension de grille V_g qui commande la densité n_{el} d'électrons dans l'échantillon. Classiquement, on s'attend à une tension longitudinale constante et une tension de Hall qui varie comme $1/n_{el}$. L'expérience montre ici que la tension de Hall présente des plateaux et que la tension longitudinale correspondant à ces plateaux s'annule. À droite une expérience plus récente montre la variation de la résistance de Hall R_H et de la résistance longitudinale R_L en fonction du champ magnétique B , pour une densité n_{el} fixée.

où i est un entier. Il réalise aussi très vite la portée de ce résultat, et son importance en métrologie. Le titre de l'article publié "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance" met en évidence l'intérêt fondamental de cette expérience et relie la quantification de la résistance de Hall à la détermination de la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{\mu_0 c e^2}{2 h}. \quad (5.12)$$

L'effet Hall quantique est maintenant utilisé pour déterminer l'étalon de résistance et le rapport e^2/h constitue une nouvelle unité de résistance, le

Klitzing

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812,807\Omega . \quad (5.13)$$

La compréhension de cet effet remarquable nécessite la description quantique de la dynamique des électrons en présence d'un champ magnétique.

5.2.2 Les niveaux de Landau

La discussion introductive décrivait le comportement des électrons en champ faible. En champ suffisamment fort, les électrons effectuent un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, bien connu en mécanique classique. L'équation du mouvement classique

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.14)$$

décrit en effet un mouvement circulaire de rayon $R = mv/eB$ appelé *rayon cyclotron* et à la pulsation $\omega_c = eB/m$ appelée *pulsation cyclotron*. Pour des états électroniques dans une bande avec une relation de dispersion quadratique, la relation (5.14) reste valable et m désigne alors une masse effective.

La description quantique de ce mouvement conduit à des trajectoires et des niveaux d'énergie quantifiés. Avant de développer ce calcul quantique, il est utile de décrire le plus simplement possible cette quantification.

La mécanique quantique nous apprend qu'un mouvement périodique est quantifié. La condition de quantification dite de Bohr-Sommerfeld (appliquée pour la première fois par Bohr en 1913 pour la quantification de l'atome d'hydrogène) implique que sur une trajectoire périodique,

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = (n + \gamma)h \quad (5.15)$$

où n est un entier positif et $0 \leq \gamma < 1$. On rappelle que l'impulsion \vec{p} est reliée à la quantité de mouvement $m\vec{v}$ par $\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A}$ et dans la jauge symétrique, le potentiel vecteur s'écrit $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Sur une trajectoire circulaire de rayon R , la condition de quantification (5.15) conduit à

$$2\pi R(mv - \frac{1}{2}eBR) = (n + \gamma)h \quad (5.16)$$

et, puisque $mv = eBR$, on déduit que l'énergie $E = \frac{1}{2}mv^2$ est quantifiée

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar \frac{eB}{m} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \quad (5.17)$$

où la valeur de $\gamma = 1/2$ ne peut être déterminée par ce calcul semi-classique. On note aussi que le rayon cyclotron est quantifié :

$$R = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = \sqrt{2n+1} \ell_B \quad (5.18)$$

où on a introduit la longueur $\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ appelée *longueur magnétique*.

Ce petit calcul nous rappelle qu'en présence d'un champ magnétique les niveaux d'énergie du gaz d'électrons bidimensionnel sont quantifiés en niveaux discrets appelés **niveaux de Landau**. Cette quantification qui n'est pas prise en compte dans la description de l'effet Hall "classique" est un ingrédient essentiel pour comprendre la quantification de l'effet Hall sous champ fort. Le calcul quantique complet de la quantification de Landau est rappelé en PC.

Notons enfin que ces niveaux de Landau sont fortement dégénérés. En effet, on part d'électrons libres à deux dimensions pour lesquels la densité d'états, c'est-à-dire le nombre d'états dont l'énergie est comprise dans une tranche $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$, est donnée par $\rho(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon}$ où $N(\epsilon)$ est le nombre d'états d'énergie inférieure à ϵ : ¹ $N = s \frac{\pi k^2}{(2\pi)^2} = s \frac{m\epsilon}{2\pi\hbar^2}$. $s = 2$ est la dégénérescence de spin. À deux dimensions, la densité d'états est donc indépendante de l'énergie $\rho(\epsilon) = s \frac{m}{2\pi\hbar^2}$. On note aussi $\rho_1 = m/(2\pi\hbar^2)$, la densité d'états par direction de spin.

Le continuum d'états en champ nul doit se condenser en niveaux discrets séparés de $\hbar\omega_c$ (figure 5.3). Le nombre d'états n_B dans un niveau de Landau, appelé dégénérescence du niveau de Landau, est donc nécessairement égal au nombre d'états compris dans une tranche de largeur $\hbar\omega_c$, c'est-à-dire $n_B = \rho_1 \hbar\omega_c = \frac{eB}{h}$, par direction de spin. Pour une densité n_{el} d'électrons, et un champ magnétique B , c'est-à-dire une dégénérescence n_B des niveaux, on note ν le facteur de remplissage

$$\nu = \frac{n_{el}}{n_B} . \quad (5.19)$$

Ainsi on peut récrire la résistance de Hall donnée par (5.5) sous la forme

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2} \quad (5.20)$$

¹La densité électronique n_{el} est donc donnée par $n_{el} = N(\epsilon_F)$

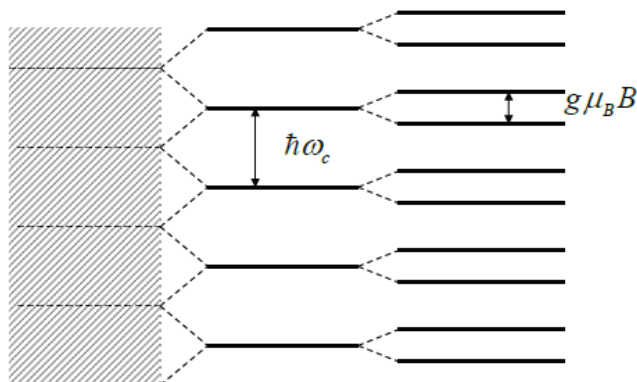


Figure 5.3: *En présence d'un champ magnétique, le continuum d'états électronique est quantifié en niveaux de Landau d'énergie $(n + 1/2)\hbar\omega_c$. Ces niveaux sont éventuellement scindés en sous-niveaux électroniques de spin parallèles ou antiparallèles au champ, à cause de l'effet Zeeman ou d'autres mécanismes liés aux interactions électron-électron et qui ne seront pas discutés ici.*

En quoi cette quantification du spectre en niveaux de Landau nous renseigne-t-elle sur l'apparition de plateaux pour la résistance de Hall? Puisque la résistance de Hall est donnée par $R_H = B/n_{el}e$, on remarque que lorsque la densité n_{el} de porteurs est telle que i niveaux de Landau sont complètement remplis, c'est-à-dire lorsque $n_{el} = in_B$ (le facteur de remplissage ν est alors un entier i), alors la résistance de Hall est égale à $R_H = h/(ie^2)$.

Mais cela n'explique pas les plateaux de résistance de Hall! Si on fait varier n_{el} à B fixé, ou si on fait varier le champ magnétique B à densité n_{el} de porteurs fixée, comment expliquer que la résistance de Hall reste constante? On voit que tout se passe comme si, bien que les niveaux de Landau ne soient plus complètement remplis, la conductance (ou la résistance) de Hall reste celle de i niveaux complètement remplis. Comment expliquer par ailleurs que la résistance longitudinale s'annule? La réponse assez complexe à ces deux questions réside dans deux ingrédients importants, le désordre et les états de bord.

5.2.3 Parenthèse : mouvement dans un champ magnétique et un champ électrique

Rappelons quelques éléments de mécanique classique. Nous avons rappelé que dans un champ magnétique les trajectoires classiques sont circulaires. Rajoutons un champ électrique dans la direction y . Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -ev_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} &= ev_x B - eE_y \end{aligned} \quad (5.21)$$

ce qui nous montre que, dans un référentiel se déplaçant à la vitesse $v_{0x} = E_y/B$, les équations du mouvement sont inchangées. L'effet du champ électrique \vec{E} est donc simplement une dérive des trajectoires cyclotron dans la direction x avec la vitesse $\vec{v}_0 = (\vec{E} \times \vec{B})/B^2$. On peut alors considérer que les trajectoires électroniques dans la barre de Hall sont des orbites cyclotron dérivant à la vitesse \vec{v}_0 (figure 5.4).

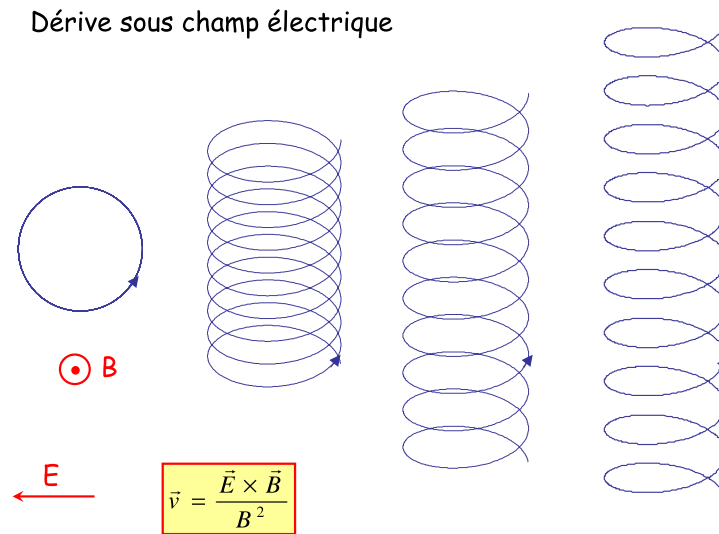


Figure 5.4: Sous champ électrique (nul, puis croissant de gauche à droite), les trajectoires cyclotron dérivent à la vitesse $\vec{v}_0 = (\vec{E} \times \vec{B})/B^2$.

5.2.4 Rôle du désordre

Une observation essentielle est que l'observation de l'effet Hall quantique, c'est-à-dire l'existence de plateaux pour la résistance de Hall, n'est possible que dans des échantillons "sales", suffisamment désordonnés. L'effet tend à disparaître pour des échantillons de plus en plus purs. Le désordre joue donc un rôle essentiel. Quelle est la nature de ce désordre? celui-ci est dû au potentiel induit par les impuretés de substitution à l'origine du dopage du semi-conducteur. On peut représenter l'effet du désordre par un potentiel $V(\vec{r})$ aléatoire à l'intérieur de l'échantillon et dont les variations spatiales sont lentes devant le rayon cyclotron (Plus précisément $\ell_B \nabla V \ll \hbar \omega_c$). Alors, localement, une trajectoire cyclotron est soumise à un champ électrique $\vec{E} = \frac{1}{e} \vec{\nabla} V$ et acquiert donc une vitesse de dérive ²

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{e} (\vec{\nabla} V \times B) / B^2 \quad (5.22)$$

Ainsi les orbites cyclotron peuvent rester *piégées* le long des équipotentielles, comme on le voit sur la figure (5.5).

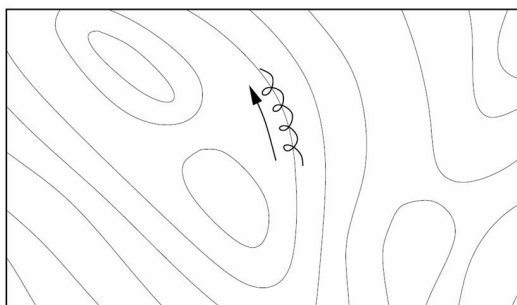


Figure 5.5: *En présence d'un potentiel de désordre $V(\mathbf{r})$, les trajectoires cyclotron s'enroulent autour des équipotentielles de $V(\mathbf{r})$, et sont localisées. Elles sont piégées par le désordre.*

Ces trajectoires sont donc localisées par le potentiel de désordre et ne peuvent contribuer au transport électronique. Pourtant, la résistance longitudinale est nulle! il n'y a pas de chute de potentiel le long de la direction x . Ce qui amène à se poser la question: comment le courant est-il transporté dans la direction x ?

²On prendra garde à ne pas confondre le potentiel électrostatique V_{el} tel que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V_{el}$ et l'énergie potentielle V . On a $V = qV_{el} = -eV_{el}$ de sorte que $\vec{E} = \frac{1}{e} \vec{\nabla} V$.

5.2.5 Les états de bord

C'est là qu'interviennent les *états de bord*. Ce qui caractérise un bord, c'est l'existence d'un potentiel $V(y)$ qui confine les électrons dans l'échantillon. Ce potentiel est rapidement croissant au bord. L'hamiltonien décrivant la géométrie d'un ruban infini selon la direction x avec des bords selon la direction y est de la forme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(y) \quad (5.23)$$

où $V(y)$ est le potentiel de confinement. Le potentiel vecteur est choisi dans la jauge de Landau $\mathbf{A} = (-By, 0)$. Dans cette jauge, l'invariance par translation le long de la direction x implique que les fonctions d'onde sont de la forme

$$\psi_{n,k}(x, y) = e^{ikx} F_{n,k}(y) , \quad (5.24)$$

où k est le vecteur d'onde selon x . L'équation de Schrödinger est celle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel dans un potentiel $V(y)$:

$$E F_{n,k}(y) = \left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(y - y_c)^2 + V(y) \right] F_{n,k}(y) \quad (5.25)$$

où $\omega_c = eB/m$ est la fréquence cyclotron.³ La position y_c du centre de l'oscillateur, qui correspond à la position du centre de l'orbite cyclotron est reliée à la composante k du vecteur d'onde selon la direction x .

$$y_c = \frac{\hbar k}{eB} = k\ell_B^2 \quad (5.26)$$

où ℓ_B est la longueur magnétique, définie par $\ell_B = \sqrt{\hbar/eB}$.

Au centre de l'échantillon, le potentiel $V(y)$ est nul et les niveaux d'énergie ne dépendent pas de la position y_c : $E_{n,k} = (n + 1/2)\hbar\omega_c$. Près des bords, à cause du potentiel de confinement, leur énergie augmente (figure 5.6) et elle dépend donc de k par l'intermédiaire de y_c :

$$E_{n,k} = E_n[y_c(k)]$$

³On rappelle que les solutions de l'équation (5.25) sont données par

$$F_{n,k}(y) = \left(\frac{1}{\pi\ell_B^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-u^2/2} H_n(u)$$

où H_n sont les polynômes de Hermite et $u = (y - y_c)/\ell_B$.

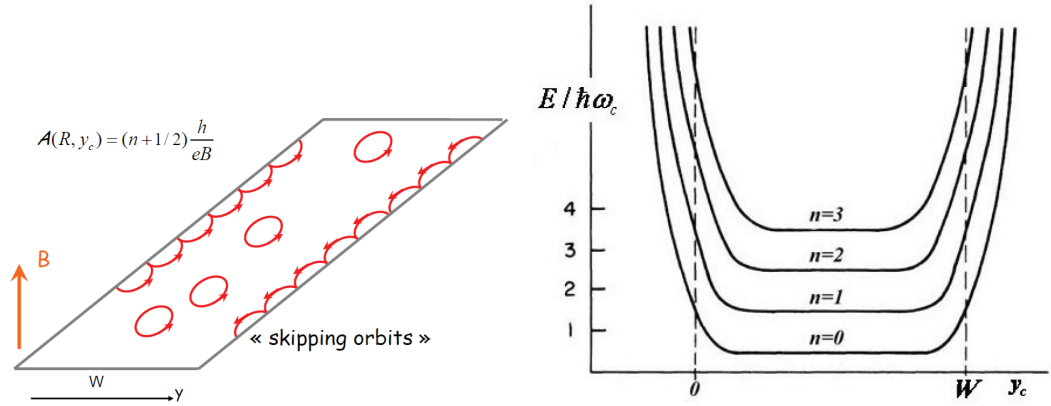


Figure 5.6: *Haut*: Représentation schématique des trajectoires cyclotron en volume et près des bords en l'absence de désordre. Les trajectoires qui rebondissent sur les bords sont appelées en anglais "skipping orbits" (orbites "sautillantes"). La quantification semiclassique de ces trajectoires est donnée par la quantification de leur surface $\mathcal{A}(R, y_c) = (n + 1/2)h/eB$ où R est le rayon cyclotron et y_c est la distance aux bords. *Bas*: L'énergie des niveaux de Landau augmente lorsque les trajectoires cyclotron se rapprochent des bords.

Deux limites peuvent être considérées pour décrire le potentiel de confinement au voisinage des bords d'un échantillon de largeur L :

- Le potentiel au voisinage des bords est infini et abrupt:

$$\begin{aligned} V(y) &= 0 \quad , \quad 0 < y < L \\ V(y) &= \infty \quad , \quad y < 0 \quad \text{ou} \quad y > L . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Les niveaux d'énergie sont obtenus par résolution de l'équation de Schrödinger avec barrières de potentiel infinies (résolution approchée en PC). Ce problème est bien décrit par la quantification de Bohr-Sommerfeld d'orbites cyclotron rebondissant sur les bords (voir PC). Les orbites semiclassiques sont représentées sur la figure (5.7.a). On montre en PC que la dépendance des niveaux d'énergie près des bords peut être obtenue par la règle de quantification de la surface des orbites cyclotron $\mathcal{A}(R, y_c) = (n + 1/2)h/eB$, où R est le rayon cyclotron relié à l'énergie $\epsilon = \frac{1}{2}m\omega_c^2 R^2$ et y_c est la distance entre un bord et le centre de l'orbite cyclotron. Pour les "skipping orbits", l'orbite cyclotron est tronquée et par conséquent pour une valeur de n et donc une valeur de \mathcal{A} fixées, le rayon cyclotron donc l'énergie augmentent en se rapprochant du bord.

• Le potentiel au voisinage des bords est lentement variable. On suppose dans cette limite que la variation du potentiel (par rapport à la distance entre niveaux de Landau) est lente sur l'échelle associée à l'extension d'un état propre, c'est-à-dire ℓ_B . Cette condition se traduit par $\ell_B \frac{\partial V}{\partial y} \ll \hbar \omega_c$. Dans ce cas, les niveaux d'énergie suivent "adiabatiquement" le potentiel et on a tout simplement

$$E_{n,k} = E_n[y_c(k)] = (n + 1/2)\hbar\omega_c + V(y_c). \quad (5.28)$$

Les orbites semiclassiques correspondant à cette situation sont représentées sur la figure (5.7.b).

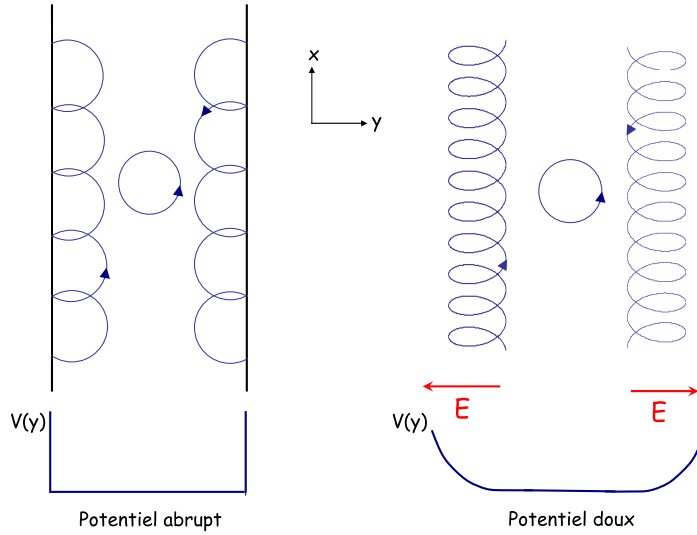


Figure 5.7: Description semiclassique des états de bords, a) dans un potentiel de confinement abrupt, b) dans un potentiel lentement variable aux bords.

Dans les deux cas, les niveaux d'énergie dépendent de k , par l'intermédiaire de y_c . La variation des niveaux d'énergie $E_n(y_c)$ est représentée sur la figure (5.6). Puisque près des bords, l'énergie dépend de y_c , donc de k , les états associés ont une vitesse finie dans la direction x

$$v_k = \frac{\partial E_n(y_c)}{\hbar \partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial E_n(y_c)}{\partial y_c} \quad (5.29)$$

Dans le cas du potentiel lentement variable, compte tenu de (5.28), la relation (5.29) montre que $v_k = \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial y_c}$, ce qui s'interprète simplement comme la vitesse de dérive (eq. 5.22) induite par le champ électrique $E_y = \frac{\partial V}{\partial y}$.

On constate aussi sur la figure (5.6) que lorsque le niveau de Fermi se trouve au dessus du niveau n , il y a $i = n + 1$ états de bords au niveau de Fermi. Nous avons déjà vu que les états de volume ne conduisent pas et nous allons montrer maintenant que ce sont ces i états de bords qui contribuent à la conduction de Hall.

5.2.6 Courant de Hall

Si les états de volume sont piégés par le potentiel de désordre, les états de bord sont délocalisés et ne sont pas sensibles au désordre. Cela se comprend facilement à l'aide de la figure (5.8) qui montre qu'une trajectoire près des bords repart toujours dans la même direction même après collision sur une impureté. La transmission associée à un état de bord est donc parfaitement égale à 1. Les états de bords sont par ailleurs des états *chiraux*, c'est-à-dire que les états d'un bord portent un courant dans une direction donnée et ceux de l'autre bord portent un courant dans l'autre direction. Seuls ces états de bords peuvent contribuer au courant.

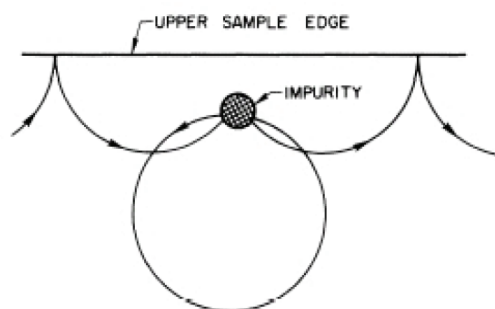


Figure 5.8: Après collision sur une impureté près d'un bord, une trajectoire cyclotron repart dans la même direction. .

On utilise maintenant l'approche de Landauer pour calculer le courant porté par ces états de bord.

Précisons la géométrie de la mesure. On utilise en général une géométrie à six terminaux (figure 5.10), comme c'est le cas dans l'expérience présentée sur la figure (5.2) . Les terminaux (1) et (2) sont les terminaux d'injection du courant, et les autres terminaux servent à mesurer les potentiels. Puisque la transmission des états de bord est parfaite ($T = 1$), on a $V_1 = V_3 = V_5$ et $V_2 = V_4 = V_6$.

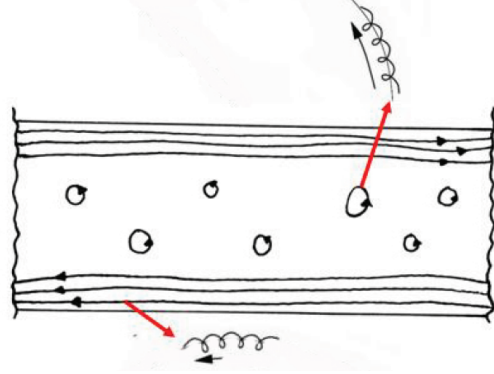


Figure 5.9: Représentation schématique des états de volume et de bords. Chaque trajectoire représentée décrit le mouvement du centre de guidage de la trajectoire cyclotron qui s'enroule autour d'une équipotentielle.

La résistance longitudinale est donc nulle: $R_L = (V_3 - V_5)/I = (V_4 - V_6)/I = 0$. Par ailleurs le courant dans la direction x est la somme des contributions des deux courants de bord. Le courant sur le bord supérieur est dû aux électrons émis par le réservoir (1) au potentiel V_1 . Pour un canal de bord, la transmission de ce canal étant parfaite ($T = 1$), le courant I_{\rightarrow} est donné par

$$I_{\rightarrow} = -e \sum_{k>0} \frac{v_k}{L} f(\epsilon_k + eV_1). \quad (5.30)$$

Le courant parcouru dans l'autre direction le long de l'autre bord est émis par le réservoir (2) au potentiel V_2 et est donné par

$$I_{\leftarrow} = -e \sum_{k<0} \frac{v_k}{L} f(\epsilon_k + eV_2). \quad (5.31)$$

Si les deux réservoirs sont au même potentiel, les deux bords portent chacun des courants non nuls mais qui se compensent. Lorsque les potentiels sont différents, $V_1 \neq V_2$, le courant total I est donné à basse température par

$$I = I_{\rightarrow} + I_{\leftarrow} = \frac{e^2}{2} \rho_1(E) v(E) (V_1 - V_2) \quad (5.32)$$

La dépendance en énergie de ces états de bords n'est pas simple en général (eq. 5.29). La vitesse d'un état k_x est donnée par $v(k_x) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} = \frac{1}{eB} \frac{\partial E}{\partial y}$ et dépend de la forme précise du potentiel de confinement. Mais il n'est pas nécessaire de connaître cette vitesse, mais de rappeler que la combinaison

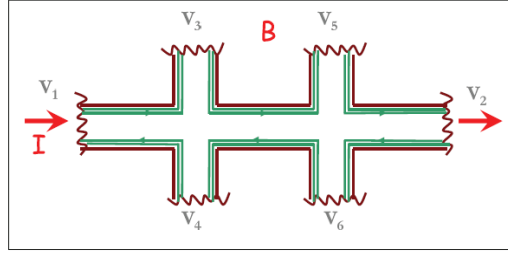


Figure 5.10: Géométrie à six terminaux pour l'étude de l'effet Hall quantique. Les mesures de tension donnent accès à la résistance longitudinale $R_L = (V_3 - V_5)/I$ et la résistance de Hall $R_H = (V_3 - V_4)/I$. La résistance "2-terminaux" est donnée par $R_{2t} = (V_1 - V_2)/I$.

$\rho_1(E)v(E) = \frac{2}{h}$, pour une direction de spin. Par conséquent, le courant total porté par **un** état de bord est donné par la formule de Landauer

$$I = \frac{e^2}{h}(V_1 - V_2). \quad (5.33)$$

Et puisque $V_3 = V_1$ et $V_4 = V_2$, la résistance de Hall est quantifiée:

$$R_{12,34} = \frac{V_3 - V_4}{I} = \frac{h}{2e^2} \quad (5.34)$$

Pour i canaux de bords, le courant est simplement la somme des contributions identiques des différents canaux et la résistance de Hall devient

$$R_{12,34} = \frac{V_3 - V_4}{I} = \frac{h}{ie^2}. \quad (5.35)$$

On note que la résistance "2-terminaux" $R_{12,12}$ est aussi quantifiée :

$$R_{2t} = R_{12,12} = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{h}{ie^2}. \quad (5.36)$$

Elle ne l'est plus si la transmission aux contacts devient imparfaite (figure 5.11).

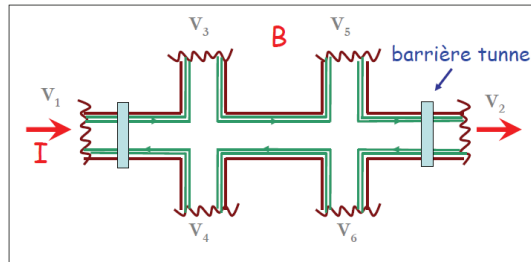


Figure 5.11: *En présence de barrières tunnel, la résistance de Hall reste quantifiée, mais la résistance "2-fils" ne l'est plus. La résistance longitudinale reste nulle.*

5.2.7 Origine des plateaux

Il reste à comprendre pourquoi on observe des plateaux. Il faut comprendre pourquoi, lorsque le champ B ou lorsque le nombre de porteurs n_{el} sont modifiés, la résistance de Hall reste constante. Ceci est possible grâce aux états piégés en volume dont le spectre forme un continuum en énergie (figure 5.12). Ainsi, lorsque B ou n_{el} varient, le potentiel chimique varie continûment, mais le nombre d'états de bords i reste fixé. La résistance de Hall ne change pas et correspond à la transmission parfaite de ces i états de bord. Puisque leur transmission est parfaite, $V_4 = V_6$ et la résistance longitudinale est donc nulle. Ceci jusqu'à ce que le potentiel chimique se trouve dans une région d'états délocalisés (on peut imaginer le potentiel comme un ensemble de collines et de dépressions autour desquels les états restent piégés). Il existe une valeur particulière (ou plutôt une fenêtre étroite) du potentiel chimique pour laquelle les états deviennent délocalisés dans des "vallées" qui relient les deux bords (figure 5.12.e). Pour cette valeur du potentiel chimique, la résistance de Hall saute alors rapidement de i à $i-1$ et la résistance longitudinal est finie, car un des états de bord devient fortement diffusé par le potentiel de volume.

En résumé, dans le régime de quantification de l'effet Hall, le courant longitudinal est porté par les états de bord, dont la transmission est parfaite, ces états n'étant pas sensibles au désordre. Le mécanisme de transport est bien décrit par l'approche de Landauer-Büttiker, avec cette nouveauté remarquable que les états portant un courant positif ou négatif sont séparés spatialement, ce qui a pour conséquence la transmission parfaite des canaux.

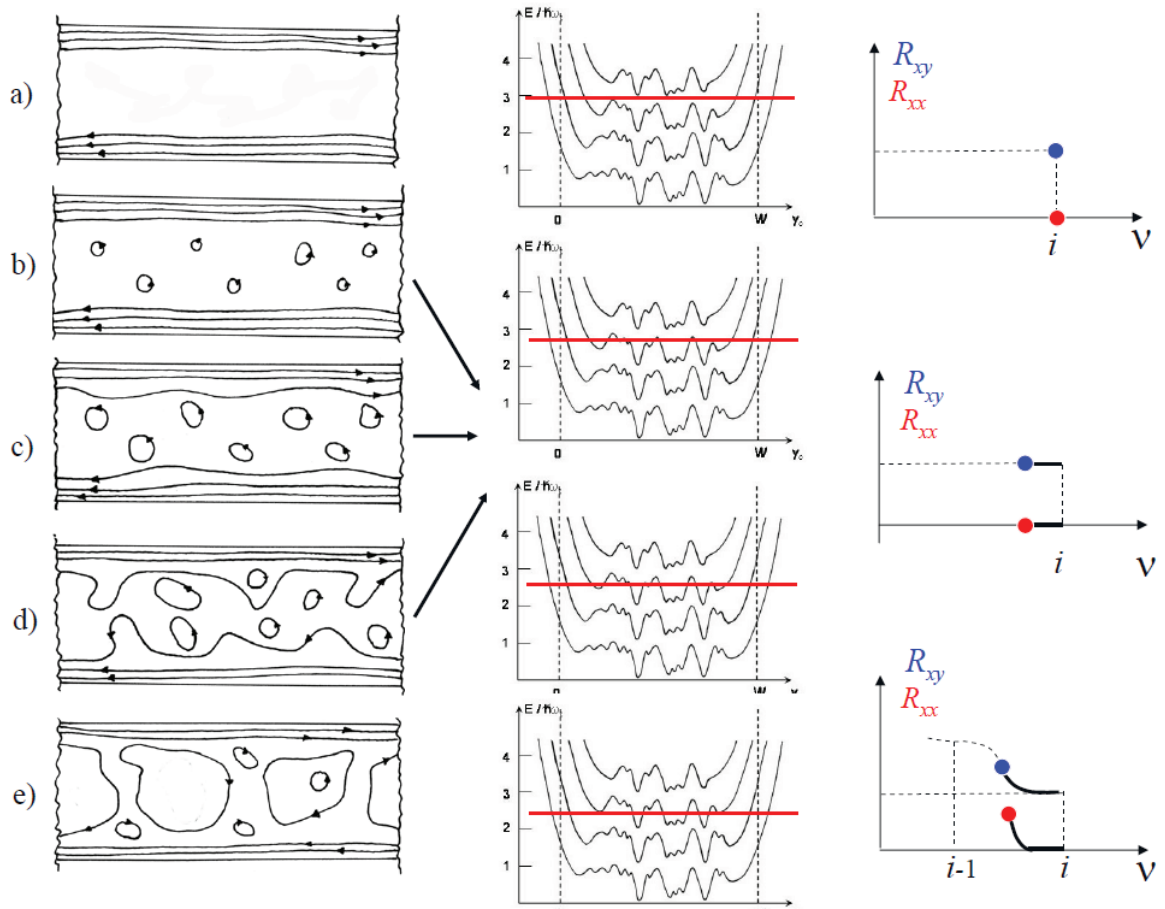


Figure 5.12: *Description schématique de la quantification de l'effet Hall.*

5.3 l'effet Hall quantique fractionnaire

L'histoire est loin d'être terminée. Dans les années 1980, l'utilisation d'échantillons de AlGaAs au lieu de Si-MOSFET a permis de réduire le désordre et d'atteindre des mobilités plus importantes. Dans de tels échantillons, les plateaux de Hall sont plus étroits, et "vont laisser la place" à un effet encore plus spectaculaire. En 1981, D. Tsui et H. Stormer aux Bell Laboratories constatent

pour des champs suffisamment élevés d'un nouveau plateau, correspondant, si on continue à garder la relation (5.11), à une valeur de ν fractionnaire. Ils observent un plateau pour $\nu = 1/3$! On rapporte l'anecdote suivante: D. Tsui regardant sa courbe se serait exclamé : "Quarks"!

Rien à voir pourtant avec les particules élémentaires, mais cette découverte allait être la première d'une série d'observations de nouveaux plateaux fractionnaires, de plus en plus nombreux au fur et à mesure que la mobilité des échantillons a été améliorée. La figure (5.13) présente une hiérarchie complexe de ces plateaux, accompagnée par une annulation de la résistance longitudinale. Les plateaux correspondent à des facteurs de remplissage fractionnaires $\nu = p/q$, où p et q sont des entiers

$$R_H = \frac{q}{p} \frac{h}{e^2} \quad (5.37)$$

La compréhension de cet effet est complexe et nécessite la prise en compte de l'interaction coulombienne entre les électrons. La valeur quantifiée de R_H correspond à l'existence de charges effectives fractionnaires $e^* = ep/q$ qui sont des excitations élémentaires d'un état fondamental fortement corrélé.

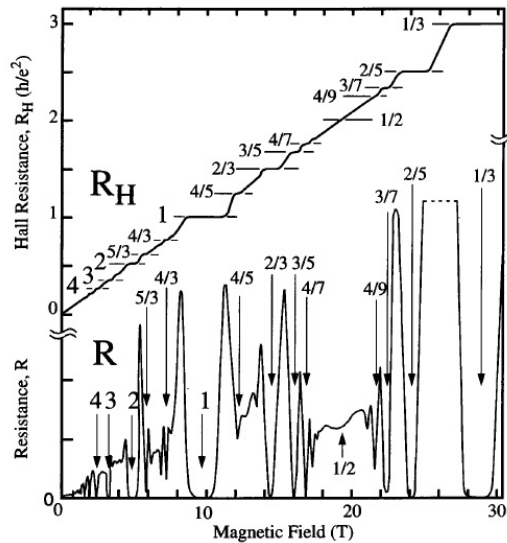


Figure 5.13: *Effet Hall quantique fractionnaire.*